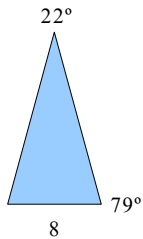


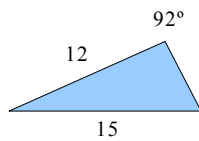
Teoremas del seno y el coseno: ejercicios resueltos

1) En los siguientes triángulos, halla los lados y ángulos restantes:

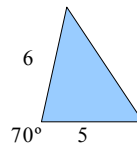
a)



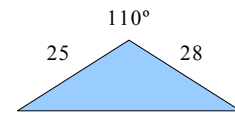
b)



c)



d)



2) Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° , y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60° . Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

3) Los flancos de un triángulo forman un ángulo de 80° con la base. Si el triángulo tiene 30 centímetros de base, calcula la longitud de sus lados.

4) Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20° . Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

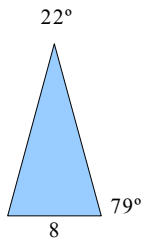
5) Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60° en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla.

Cajón de Ciencias

Soluciones

1)

a)



Cuando tengamos que resolver un triángulo no rectángulo del cual conozcamos una pareja ángulo-lado opuesto y un dato de algún otro lado o ángulo, aplicaremos el teorema del seno. Recuerda que es el que establece la siguiente relación:

$$a/\text{sen}A = b/\text{sen}B = c/\text{sen}C$$

Siendo **a** y **A**, **b** y **B**, **c** y **C** las parejas de ángulo y lado opuesto. Utilizamos en este caso los 22° y el lado de 8 como referencia y calculamos el lado opuesto a los 79° :

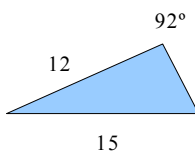
$$\begin{aligned}8/\text{sen}22 &= b/\text{sen}79 \\8/0,37 &= b/0,98 \\b &= 21,62 \cdot 0,98 \\b &= 21,22\end{aligned}$$

Para hallar el resto podría parecer que nos falta el dato del tercer ángulo. Pero recuerda que los tres ángulos de un triángulo siempre suman 180° . Por lo tanto, ese tercer ángulo debe valer

$$C = 180 - 22 - 79 = 79^\circ$$

Así que es un triángulo isósceles. No hace falta hacer más cálculos: si tiene dos ángulos iguales, también tiene dos lados iguales, y el lado que nos falta también mide 21,22.

b)



Otro caso de teorema del seno, pues tenemos una pareja ángulo/lado opuesto completa, y algún otro dato suelto. Empezamos calculando el ángulo que está frente al lado que mide 12:

$$\begin{aligned}15/\text{sen}92 &= 12/\text{sen}B \\15/0,99 &= 12/\text{sen}B \\ \text{sen}B &= 12/15,15 \\ B &= 52,37^\circ\end{aligned}$$

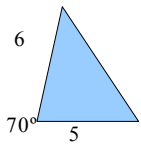
El tercer ángulo mide $37,63^\circ$ (180 menos la suma de los otros dos). Con este dato calculamos el tercer lado:

$$\begin{aligned}15/\text{sen}92 &= c/\text{sen}37,63 \\15,15 &= c/0,61 \\c &= 9,25\end{aligned}$$

(También podríamos haber usado la otra pareja $b/\text{sen}B$; comprueba que da lo mismo).

Cajón de Ciencias

c)



Ahora no nos vale el teorema del seno, porque no tenemos una pareja de ángulo/lado opuesto. Para estos casos, en los que conocemos dos lados y el ángulo del vértice que forman, usamos el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

Siendo **a** el lado que nos falta. Si te fijas, la fórmula se parece un montón al teorema de Pitágoras, sólo que con un añadido; esta “actualización” es la que nos permite usarla en triángulos no rectángulos. La fórmula del teorema del coseno también debería recordarte a otra cosa. Intenta pensar cuál antes de mirar la nota al pie de página¹.

$$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos 70$$

$$a^2 = 61 - 60 \cdot 0,34$$

$$a^2 = 40,48$$

$$a = 6,36$$

Conociendo el lado opuesto, ya podemos usar el teorema del seno para hallar alguno de los ángulos que aún no tenemos:

$$6,36/\sin 70 = 5/\sin B$$

$$6,36/0,94 = 5/\sin B$$

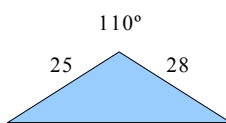
$$\sin B = 5/6,39$$

$$B = 51,54^\circ$$

Y por lo tanto, C vale

$$C = 180 - 51,54 - 70 = 58,46^\circ$$

d)



De nuevo usamos el teorema del coseno. Se resuelve igual que el caso anterior.

$$a^2 = 25^2 + 28^2 - 2 \cdot 25 \cdot 28 \cdot \cos 110$$

$$a^2 = 625 + 784 - 1400 \cdot (-0,34)$$

$$a^2 = 1885$$

$$a = 43,42$$

Y luego el teorema del seno:

$$43,42/\sin 110 = 25/\sin B$$

$$\sin B = 25/46,21 = 0,54$$

$$B = 32,76^\circ$$

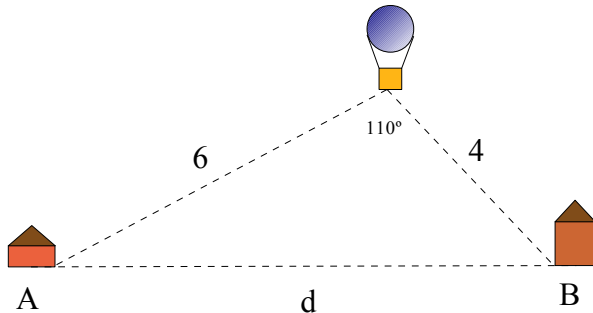
$$C = 180 - 110 - 32,76 = 37,24^\circ$$

¹ “El primero al cuadrado más el segundo al cuadrado menos dos veces el primero por el segundo” ¿O no se parece al cuadrado de una resta?

Cajón de Ciencias

2) Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° , y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60° . Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

Hagamos primero un esquema de la situación. Sería así:



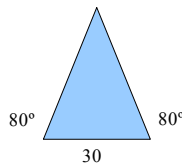
El ángulo debajo del globo es de 110° porque si trazáramos una perpendicular desde el globo al suelo, a la izquierda tendríamos 50° y a la derecha 60° (por cierto, también nos podrían preguntar la altura a la que está el globo; usaríamos entonces el teorema de la altura).

Aquí tendremos que usar el teorema del coseno, porque el ángulo que conocemos es el que forman los dos lados de los cuales tenemos su longitud.

$$\begin{aligned}d^2 &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 110^\circ \\d^2 &= 52 - 48 \cdot (-0,34) \\d^2 &= 52 + 16,32 \\d &= 8,27\text{Km}\end{aligned}$$

3) Los flancos de un triángulo forman un ángulo de 80° con la base. Si el triángulo tiene 30 centímetros de base, calcula la longitud de sus lados.

La representación gráfica es esta:



En primer lugar, podemos deducir que el ángulo que falta mide 20° , porque la suma de todos los ángulos de un triángulo debe sumar 180° .

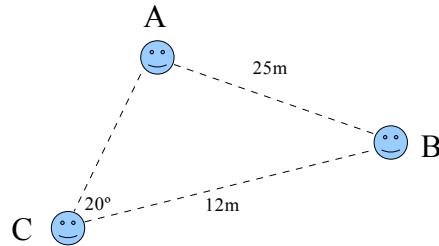
Sabiendo este dato, aplicamos el teorema del seno para hallar la longitud de un lado. El otro lado mide lo mismo, porque es un triángulo isósceles (fíjate que tiene dos ángulos iguales. Pero si no te fías, puedes calcularlo y verás que te da el mismo valor).

$$\begin{aligned}30/\text{sen}20^\circ &= x/\text{sen}80^\circ \\87,71 &= x/\text{sen}80^\circ \\x &= 87,71 \cdot \text{sen}80^\circ \\x &= 86,38\text{cm}\end{aligned}$$

Cajón de Ciencias

4) Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20° . Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.

El esquema de la situación sería algo así:



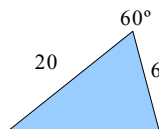
Como en el ejercicio anterior, tenemos al menos una pareja ángulo-lado opuesto. Para hallar la medida del lado que nos falta, nos basta recurrir al teorema del seno. El problema es que el ángulo opuesto al lado AC tampoco lo sabemos, algo que tiene fácil solución si primero aplicamos el teorema del seno para hallar el ángulo A y después deducir la medida de B.

$$\begin{aligned}25/\text{sen}20^\circ &= 12/\text{sen}A \\73,10 &= 12/\text{sen}A \\ \text{sen}A &= 12/73,10 \\ \text{sen}A &= 0,16 \\ A &= 9,45^\circ\end{aligned}$$

Como los tres ángulos deben sumar 180° , B debe valer $150,55^\circ$. Ahora ya tenemos todo lo necesario para volver a usar el teorema del seno y hallar la distancia AC:

$$\begin{aligned}25/\text{sen}20^\circ &= AC/\text{sen}150,55^\circ \\73,10 &= AC/0,49 \\ AC &= 73,10 \cdot 0,49 = 35,94\text{m}\end{aligned}$$

5) Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60° en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla.



Pedirnos el perímetro de la valla es lo mismo que pedirnos hallar el lado que falta y sumarlos todos.

$$\begin{aligned}d^2 &= 6^2 + 20^2 - 2 \cdot 6 \cdot 20 \cdot \cos 60^\circ \\d^2 &= 436 - 240 \cdot 0,5 \\d &= 17,78\text{m}\end{aligned}$$

$$\text{Perímetro} = 20 + 6 + 17,78 = 43,78\text{m}$$

Cajón de Ciencias